Musterlösung zur Prüfung Mathematik III, Sommer 08,
Dr. P. Thurnheer

1. **a)** Das Flächenstück $\mathcal{G}$ ist ein rechtwinkliges Dreieck in der Ebene $z = 2$ mit Eckpunkten $(0, 0, 2)^T$, $(\frac{3\pi}{2}, 0, 2)^T$ und $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2)^T$.

b) Wir berechnen

$$\frac{\partial a(u,v)}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial a(u,v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n(u,v) := \frac{\partial a(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial a(u,v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \iint_{\mathcal{G}} F dA &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^u \langle F(a(u,v)), n(u,v) \rangle dv du \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^u 2 \sin u dv du = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 2u \sin u du \\ &= 2[\sin u - u \cos u]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -2. \end{aligned}$$

c) Es sei $\mathcal{P}$ die Pyramide mit Grundfläche $\mathcal{G}$ und Spitze S. Es gilt

$$\iint_{\partial \mathcal{P}} F dA = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Mit $\operatorname{div} F(x, y, z) = 3$ und dem Satz von Gauss können wir berechnen

$$\iint_{\partial \mathcal{P}} F dA = \iiint_{\mathcal{P}} 3 dx dy dz = 3 \operatorname{vol}(\mathcal{P}) = 3 \frac{1}{3} \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \frac{9\pi^2}{4},$$

also

$$\Phi_2 = \frac{9\pi^2}{4} + 2.$$

Bitte wenden!

2. **a)** Nach dem Satz von Stokes ist die Arbeit von F entlang des Kreises gleich dem Fluss von $\operatorname{rot} F$ durch irgendeine Fläche mit dem Kreis als Randkurve. Wir wählen die umschlossene Kreisscheibe S mit Normale $(0,1,0)^T$, d.h. der Kreis wird im Uhrzeigersinn durchlaufen, wenn man in Richtung der y-Achse blickt. Es gilt

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also

$$\text{Arbeit} = \iint_S \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle dA = -2 \cdot \text{Fläche}(S) = -8\pi$$

b) Wir wählen eine positive Orientierung des Kreises K:

$$K = \left\{ r(t) = (2\cos t, 3, -2\sin t)^T, t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Es gilt $\dot{r}(t) = (-2\sin t, 0, -2\cos t)^T$. Damit erhält man für die Arbeit

$$\begin{aligned} \text{Arbeit} &= \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), \dot{r}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (2\sin t, 3\tan 3, 2\cos t + 1)^T, (-2\sin t, 0, -2\cos t)^T \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4\sin^2 t - 4\cos^2 t - 2\cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 - 2\cos t) dt = -8\pi. \end{aligned}$$

c) Nein, da $\operatorname{rot}(F) \neq 0$ bzw. da die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges nicht 0 ist.

Siehe nächstes Blatt!

3. Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ folgt aus der PDE

$$u_{xx}(x,t) + u_x(x,t) + \frac{u_t(x,t)}{t} = 0,$$

dass $X''T + X'T + \frac{X\dot{T}}{t} = 0$, und somit

$$\frac{X'' + X'}{X} = -\frac{\dot{T}}{tT}.$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte nur von t abhängt sind beide Terme konstant. Somit gilt:

$$\begin{aligned} X'' + X' &= \lambda X \quad (1) \\ \dot{T} &= -\lambda t T. \quad (2) \end{aligned}$$

Für die erste Gleichung lautet das charakteristische Polynom $\varrho(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - \lambda$ mit Lösungen

$$\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}.$$

Somit gilt

$$X(x) = \begin{cases} (C_1 x + C_2)e^{\alpha_1 x}, \text{ falls } \lambda = -1/4, \\ C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}, \text{ falls } \lambda \neq -1/4. \end{cases}$$

Für die zweite Gleichung gilt

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\lambda t T \\ \Rightarrow \int \frac{1}{T} dT &= -\lambda \int t dt \\ \Rightarrow \ln T &= -\lambda t^2/2 + c \\ \Rightarrow T(t) &= C_3 e^{-\lambda t^2/2}. \end{aligned}$$